The Geometry of Polycyclic groups of rank three(TRANSFORMATION GROUPS AND REPRESENTATION THEORY)

後藤, 寿史

数理解析研究所講究録
501巻 1983年 21-31

The Geometry of Polycyclic groups of rank three

東大 理学部　後藤寿史(Hisashi Goto)

$K(\pi,1)$多様体の研究において，与えられた基本群πをもつそれの，geometric structureを考察することは，極めて有益なことと思われる。この方面での研究結果としては，J. Milnorによる定理『torsion free, virtually polycyclic群を任意に与えるとき，それを基本群にもつ，完備アファイン平坦な多様体が存在する』が知られている。ここで定理における多様体は必ずしもclosedとは限らず，これをclosedなもので取れるかどうかという問を，Milnorは提示した。

ここでは，特別な場合として，cohomological dimensionが3の場合を考察し，群を完全に分類することにより上の問に対する肯定的解答を与える。更に群の分類結果の応用の1つとして，それらを基本群にもつ，既約な閉3-多様体上の有限群による自由な作用を分類する。

1. 群の分類

1.1. Pを群に関する性質とする。群Γが virtually P であるとは、$\Gamma \geq \Gamma_0$, $|\Gamma : \Gamma_0| < \infty$ であってPを満たすΓ_0が存在することである。

1.2. 群Γが <u>polycyclic</u> とは、$\Gamma = \Gamma_0 \triangleright \Gamma_1 \triangleright \cdots \triangleright \Gamma_k = \{1\}$ なる有限正規鎖で各Γ_{i-1}/Γ_i $(i=1,\cdots k)$がcyclicとなるもの が存在すること。ここで$\Gamma_{i-1}/\Gamma_i \simeq \mathbb{Z}$ なるΓ_{i-1}/Γ_iの数は群Γの invariant となり、Γの <u>rank</u> と呼ばれる。特に全ての$\Gamma_{i-1}/\Gamma_i \simeq \mathbb{Z}$のとき、$\Gamma$は poly-$\mathbb{Z}$ であるという。Γの rank は Serre による virtual cohomological dimension と一致する。

1.3. Torsion free, rank 3 の virtually polycyclic 群は次の表示をもつ群のいずれかに同型である。

(i) $\langle \alpha, \beta, \gamma : [\alpha, \beta] = 1,\ \gamma\alpha\gamma^{-1} = \alpha^a\beta^c,\ \gamma\beta\gamma^{-1} = \alpha^b\beta^d \rangle$

但し $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2;\mathbb{Z})$

(ii) $\langle \alpha, \beta, \gamma : \beta\alpha\beta^{-1} = \gamma\alpha\gamma^{-1} = \alpha^{-1},\ \gamma\beta\gamma^{-1} = \alpha^{\varepsilon}\beta^{-1} \rangle$

但し $\varepsilon = 0, 1$

(iii) $\langle x_0, y_0, x_1, y_1 : x_i y_i x_i^{-1} = y_i^{-1}\ (i=0,1),\ x_0^2 = x_1^{2a} y_1^c,\ y_0 = x_1^{2b} y_1^d \rangle$

但し $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2;\mathbb{Z})$ $\quad b \neq 0$

(iv) $\langle \alpha, \beta, \gamma : \alpha\beta\alpha^{-1} = \beta^a\gamma^c,\ \alpha\gamma\alpha^{-1} = \beta^b\gamma^d,\ [\gamma, \beta] = \alpha^{kn\varepsilon} \rangle$

但し $k \in \mathbb{Z}, k > 0$, $\varepsilon = \pm 1$, $n = 3, 4, 6$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = M_n$

ここで、

$n=3$ のとき $M_3=\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}$ $\varepsilon k \not\equiv 1 \pmod 3$

$n=4$ のとき $M_4=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ $k\equiv 0 \pmod 2$ で更に

$k\equiv 0 \pmod 4$ のとき $\varepsilon=\pm 1$

$k\equiv 2 \pmod 4$ のとき $\varepsilon=1$

$n=6$ のとき $M_6=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}$ $k\equiv 0 \pmod 2$, $k\varepsilon \not\equiv -1 \pmod 3$

1.4. 1.3. の i)〜iv) は互いに排反であることに注意する。iii)で $b\neq 0$ としたのは、i)に含まれている群を排除するため。それぞれの群を基本群にもつ3次元閉多様体は次の通り。

i) S^1 上の monodromy $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ の T^2 bundle

ii) S^1 上の Klein bottle bundle (同時に T^2 bundle でもあるものは除いてある)

iii) 2つの Klein bottle 上の twisted I bundle をそれらの boundary T^2 間の homeomorphism $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ で張り合わせてえられる Haken 多様体

iv) S^2 上の exceptional fibre 3 で index $(3,3,3)$, $(2,4,4)$ 又は $(2,3,6)$ の Seifert fibred spaces.

また、それぞれの同型類は次のように定まる。

i). 同型類は $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ の $GL(2;\mathbb{Z})$ における共役類と1:1対応。

ii) 同型類は ε で定まる。

iii) 同型類は $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ の $SL(2;\mathbb{Z})/\sim$ における同値類と1:1対応。

但し同値関係 $\sim$ は $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-a&b\\c&-d\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}a&-b\\-c&d\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1}$ で生成される。

(iv) 同型類は三つ組 (k, n, ε) で決まる。

定理1.3.の証明は、次のLemmaから導かれる。

1.5. Polycyclic群は、virtually poly$\mathbb{Z}$である。

1.6. Γをpolycyclic群とし、$\Gamma_0 \lhd \Gamma$を$|\Gamma : \Gamma_0| < \infty$が最小となるような、poly$\mathbb{Z}$部分群とする。この時自然な写像
$\psi : \Gamma/\Gamma_0 \longrightarrow \mathrm{Aut}\, H^1(\Gamma_0 ; \mathbb{Z})$ は単射である。

証明 群拡大 $1 \to \Gamma_0 \to P^{-1}(\mathrm{Ker}\,\psi) \to \mathrm{Ker}\,\psi \to 1$ のHochshild-Serre spectral sequenceを用いよ。ここで $P : \Gamma \to \Gamma/\Gamma_0$.

1.7. Γ_0を$H_3(\Gamma_0 ; \mathbb{Z}) \neq 0$なるrank 3のpoly$\mathbb{Z}$群とする。$\Gamma_0$は、$S^1$上の$T^2$ bundleの基本群に同型であるが、そのmonodromyを$A \in SL(2;\mathbb{Z})$とし、$\mathrm{rank}\, H^1(\Gamma ; \mathbb{Z}) = b_1$とする。このとき、

$$b_1 = 3 \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \Gamma_0 \simeq \mathbb{Z}^3$$

$$b_1 = 2 \Leftrightarrow A \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ unipotent} \Leftrightarrow \Gamma_0 \neq \mathbb{Z}^3 \text{ nilpotent}$$

$$b_1 = 1 \Leftrightarrow \det(1 - A) \neq 0$$

1.8. Γをtorsion free, rank 3のvirtually polycyclic groupでかつ、virtually abelianとする。このときΓは、1.3.で$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$なる(i)の群か、(ii)の群か又は$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$なる(iii)の群に同型である。

1.9. $GL(2;\mathbb{Z})$の有限部分群は$\mathbb{Z}_m$、又はD_m $(m = 2, 3, 4, 6)$に同型である。但し$\mathbb{Z}_m$はm巡回群、D_mはorder $2m$のdihedral群。

1.10. $A \in SL(2;\mathbb{Z})$. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ なるAは$n=3, 4, 6$に応じて、それぞれ次の行列と$GL(2;\mathbb{Z})$において共役である。

$n=3$ $A \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $n=4$ $A \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $n=6$ $A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

さて1.3. 及び1.4.より直ちに次の系がえられる。

1.11. Torsion free, rank 3, virtually polycyclic 群に対し、それを基本群にもつ、完備アファイン平坦閉3次元多様体が存在する。

1.12. Closed, irreducible で、infinite solvable group を基本群にもつ3-多様体の位相型は、ホモトピー型、則ちその基本群で決定される。

証明. Waldhausen, Scott の定理を用いよ。

2. Free な有限群の作用

2.1. 群G_iとその部分群H_iとの組(G_i, H_i) $(i=1,2)$が同型とは、群の同型$\varphi: G_1 \to G_2$で$\varphi(H_1)=H_2$なるものが存在することと定める。

Rigidity Theorem 1.12. より直ちに次のReduction Theoremが従うことは見易い。

2.2. Mをclosed, irreducible 3-多様体で$\pi_1(M)$はinfinite solvable とし、Gを有限群とする。このときM上のfree G作用の同型類は組$(H, \pi_1(M))$で$H \rhd \pi_1(M)$, $H/\pi_1(M)=G$, かつ、H torsion free なるものの同型類と1対1に対応する。

2.3. 自然数 k に対し，M_k を T^2 上の主 S^1 束でその Euler class が $k \in H^2(T^2;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ なる，closed 3-多様体とする。$\pi_1(M_k)$ は，1.3. (i) の型で $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の群である。従って $\pi_1(M_k)$ は nilpotent である。

2.4. $\mathcal{L} = \{{}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x + \frac{1}{2}kyz,\ y,\ z \in \mathbb{Z}\}$ とする。このとき，$\mathrm{Aut}\,\pi_1(M_k)$ は，$GL(3;\mathbb{R})$ の次のような部分群に同型：

$$\left\{ B = \begin{pmatrix} \varepsilon & i & j \\ & a & b \\ & c & d \end{pmatrix} \in GL(3;\mathbb{R}) \,;\, \begin{matrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2;\mathbb{Z}),\ \varepsilon = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},\ 2i, 2j \in \mathbb{Z} \\ B \text{ は } \mathcal{L} \text{ を保つ} \end{matrix} \right\}$$

ここで B に対応する同型 $\varphi_B \in \mathrm{Aut}\,\pi_1(M_k)$ は，
$\varphi_B(\alpha) = \alpha^{\varepsilon}$，$\varphi_B(\beta) = \alpha^{i+\frac{k}{2}ac}\beta^a\gamma^c$，$\varphi_B(\gamma) = \alpha^{j+\frac{k}{2}bd}\beta^b\gamma^d$ で与えられる。

証明　Malcev の定理を用いよ。

2.5. M_k 上の free involution を分類する。Reduction Theorem より，$(H, \pi_1(M_k))$ で $|H : \pi_1(M_k)| = 2$，H : torsion free なるものを分類すればよい。H が nilpotent でないときは，$\pi_1(M_k)$ は H の nil-radical に等しく，従って組の同型類は H だけで決まる。
H を nilpotent としよう。このとき $\exists l$; $H = \pi_1(M_l)$ である。
$|H:K| = 2$ なる K は $H^1(H;\mathbb{Z}_2) - \{0\}$ と自然に $1:1$ に対応し，組の同型類 (H, K) は，自然な $\mathrm{Aut}\,H$ の $H^1(H;\mathbb{Z}_2)$ への作用において $\mathrm{Aut}\,H \backslash H^1(H;\mathbb{Z}_2) - \{0\}$ と $1:1$ に対応する。
$H = \langle \alpha, \beta, \gamma : [\alpha, \beta] = 1,\ \gamma\alpha\gamma^{-1} = \alpha,\ \gamma\beta\gamma^{-1} = \alpha^l\beta \rangle$ とおくと，

$l \equiv 1 \pmod 2$ のとき．$H^1(H;\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$，$l\equiv 0 \pmod 2$ のとき，$H^1(H;\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$ であり．$\alpha.\beta.\gamma$ に対応する $H^1(H;\mathbb{Z}_2)$ の元を ${}^t\alpha.{}^t\beta.{}^t\gamma$ とすると，l odd のとき $({}^t\beta.{}^t\gamma)$，l even のとき．$({}^t\alpha.{}^t\beta.{}^t\gamma)$ がそれぞれ，base を与え，$\varphi\in \mathrm{Aut}\,H$ に対応する $\mathrm{Aut}\,H^1(H;\mathbb{Z}_2)$ の元を ${}^t\varphi$ とし．$\varphi(\alpha)=\alpha^{\varepsilon}$，$\varphi(\beta)=\alpha^i\beta^a\gamma^c$．$\varphi(\gamma)=\alpha^j\beta^b\gamma^d$ とおくと，${}^t\varphi({}^t\alpha.{}^t\beta.{}^t\gamma)=({}^t\alpha.{}^t\beta.{}^t\gamma)\begin{pmatrix}1&0&0\\ i&a&c\\ j&b&d\end{pmatrix}$ である。

以上より．組 (H,K) の同型類の数は．l odd のとき 1 l even のとき 2 で．代表系としては l odd のとき $K=\langle\alpha,\beta,\gamma^2\rangle$ を，l even のとき $K=\langle\alpha.\beta.\gamma^2\rangle$ と $K=\langle\alpha^2,\beta,\gamma\rangle$ をとることができる。$\langle\alpha.\beta.\gamma^2\rangle$ は $\pi_1(M_{2l})$ に $\langle\alpha^2.\beta.\gamma\rangle$ は $\pi_1(M_{l/2})$ に同型である。

2.6. M_k 上の free involution の同型類の数は次の通り：

$k=0$	orientation preserving	2	, orientation reversing	2
$k\equiv 1 \pmod 2$	;	1	;	0
$k\equiv 0 \pmod 2$, $k\neq 0$	;	4	;	0

2.7. M_1 上に free に作用する有限群を分類しよう。現われうる組 $(H,\pi_1(M_1))$ をなす H は次のいずれかである。

$$T_k=\langle \alpha.\beta.\gamma : [\alpha.\beta]=1\ \ \gamma\alpha\gamma^{-1}=\alpha.\ \ \gamma\beta\gamma^{-1}=\alpha^k\beta \rangle$$

$$T'_k=\langle \alpha.\beta.\gamma : [\alpha.\beta]=1\ \ \gamma\alpha\gamma^{-1}=\alpha^{-1}.\ \ \gamma\beta\gamma^{-1}=\alpha^k\beta^{-1} \rangle$$

$$S_{k,n,\varepsilon}=\langle \alpha.\beta.\gamma : \alpha\beta\alpha^{-1}=\beta^a\gamma^c.\ \alpha\gamma\alpha^{-1}=\beta^b\gamma^d,\ [\gamma.\beta]=\alpha^{kn\varepsilon} \rangle$$

ここで $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \underbrace{M_n \text{で}}_{n=2,3,4,6}$ $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$M_6 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ である。T_k, T_k' は 1.3. (i) の型，$S_{k,2,\varepsilon}$ は 1.3. (iii) の型で $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & k \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ に対応し．$S_{k,n,\varepsilon}$ $(n=3,4,6)$ は 1.3. (iv) の型である。 次の3つのLemmaは容易な計算で示せる。

2.8. 組 (T_k, T) で $T_k \rhd T$, $T \simeq T_1 \simeq \pi_1(M_1)$ なるものの同型類の数は1で代表系として，$(T_k, \langle \alpha^k, \beta, \gamma \rangle)$ をとれる。

2.9. 組 $(S_{k,n,\varepsilon}, T)$ $(n=2,3,6)$ で $S_{k,n,\varepsilon} \rhd T$, $T \simeq T_1$ なるものの同型類の数は1で代表系として．$(S_{k,n,\varepsilon}, \langle \alpha^{nk}, \beta, \gamma \rangle)$ をとれる。

2.10. 組 $(S_{k,4,\varepsilon}, T)$ で $S_{k,4,\varepsilon} \rhd T$, $T \simeq T_1$ なるものの同型類の数は $k \equiv 2 \pmod 4$ のとき 2，$k \equiv 0 \pmod 4$ のとき 1 で代表系として，$k \equiv 2$ のとき $(S_{k,4,\varepsilon}, \langle \alpha^{kn}, \beta, \gamma \rangle)$, $(S_{k,4,\varepsilon}, \langle \alpha^{4k}, \alpha^{k/2}\beta, \alpha^{k/2}\gamma \rangle)$ を $k \equiv 0$ のとき $(S_{k,4,\varepsilon}, \langle \alpha^{4k}, \beta, \gamma \rangle)$ をとれる。

以上より次の定理が示せた。

2.11. M_1 上に free に作用する有限群は巡回群 $\mathbb{Z}_m$ に限る。free $\mathbb{Z}_m$ 作用の同型類の数は次の通り：

$4 \nmid m$, $3 \nmid m$ のとき 1，$4 | m$, $8 \nmid m$, $3 \nmid m$ のとき 2，$8 | m$, $3 \nmid m$ のとき 4

$4 \nmid m$, $3 | m$, $9 \nmid m$ のとき 2，$4 \nmid m$, $9 | m$ のとき 3，$4 | m$, $3 | m$, $8 \nmid m$, $9 \nmid m$ のとき 4

$8 | m$, $3 | m$, $9 \nmid m$ のとき 6，$8 | m$, $9 | m$ のとき 8

3. Affine structure に関する注意.

3.1. $\Delta_{k,\varepsilon} = \langle \alpha, \beta, \gamma : \alpha\beta\alpha^{-1} = \gamma,\ \alpha\gamma\alpha^{-1} = \beta^{-1}\gamma^{-1},\ [\gamma, \beta] = \alpha^{3k\varepsilon} \rangle$ ($\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon k \not\equiv 1 \pmod 3$) を基本群にもつ closed, irreducible 3-多様体は, 完備な Lorentz 平坦なアファイン接続をもたないが $\Delta_{k,\varepsilon} \supset {}^{n}\Delta_{k,\varepsilon} = \langle \alpha^3, \beta, \gamma \rangle$ に対応する3重被覆多様体は, 上記の接続をもつ。

証明 ${}^{n}\Delta_{k,\varepsilon}$ から $\mathbb{R}^3 \rtimes O(2,1)$ への準同型 φ を

$$\varphi(\alpha^3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad \varphi(\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad \varphi(\gamma) = \begin{bmatrix} 1-k^2/2 & k & k^2/2 & 0 \\ -k & 1 & k & 0 \\ -k^2/2 & k & 1+k^2/2 & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

により定める。$\tilde{M} = \varphi({}^{n}\Delta_{k,\varepsilon}) \backslash \mathbb{R}^3$ が求める多様体である。さて以下において, $M = \tilde{M}/\mathbb{Z}_3$ $\pi_1(M) = \Delta_{k,\varepsilon}$ が完備な Lorentz 平坦構造をもたないことを示す。

Step1 $\theta : {}^{n}\Delta_{k,\varepsilon} \hookrightarrow A(3) = \mathbb{R}^3 \rtimes GL(3;\mathbb{R})$ で $\theta({}^{n}\Delta_{k,\varepsilon})$ は $\mathbb{R}^3$ 上 free かつ properly discontinuously に作用するとする。このとき $\theta(\alpha^3) \in \mathbb{R}^3$ である。

$\because$ Fried, Goldman, Hirsh の定理より, $\theta({}^{n}\Delta_{k,\varepsilon})$ は unipotent。N を $\theta({}^{n}\Delta_{k,\varepsilon})$ の $A(3)$ における Zariski closure とすると, N は $\pi_1(N) = \pi_0(N) = 0$ なる nilpotent Lie 群で $\theta({}^{n}\Delta_{k,\varepsilon})$ は N の lattice である。従って $N \subset A(3)$ によって, N は $\mathbb{R}^3$ 上 simply transitively に作用する。故に N はその centre に $\mathbb{R}^3 \subset A(3)$ の元を含む。これから容易に centre $Z(N) \subset \mathbb{R}^3$ がわかる。

$\theta(\alpha^3) \in Z(N)$ より. $\theta(\alpha^3) \in \mathbb{R}^3$ である。

Step 2 $O(2,1)$ の connected component を $SO_+(2,1)$ とおく。

$SO_+(2,1)$ の元で $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2+y^2-z^2=0\}$ に fixed point をもつ unipotent な元は単位元である。また $SO_+(2,1)$ の元で $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2+y^2-z^2=0\} \setminus \{0\}$ 上に fixed point をもつものは unipotent である。

Step 3 $\theta : \Delta_{k,\varepsilon} \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \rtimes O(2,1)$ で $\theta(\Delta_{k,\varepsilon})$ が $\mathbb{R}^3$ 上 free かつ properly discontinuously に作用するような準同型 θ が存在しないことを背理法で示す。

$\because$ $\theta({}^n\Delta_{k,\varepsilon}) \subset N$ N connected より. $\theta({}^n\Delta_{k,\varepsilon}) \subset \mathbb{R}^3 \rtimes SO_+(2,1)$ である。$|\Delta_{k,\varepsilon} : {}^n\Delta_{k,\varepsilon}| = 3$ $|O(2,1) : SO_+(2,1)| = 4$ より $\theta(\Delta_{k,\varepsilon}) \subset \mathbb{R}^3 \rtimes SO_+(2,1)$ である。canonical projection $\mathbb{R}^3 \rtimes SO_+(2,1) \longrightarrow SO_+(2,1)$ を h とおく。Step 1 より $\alpha^3 \in \mathbb{R}^3$. で $\alpha^3 \in Z(\Delta_{k,\varepsilon})$ より. $h(\alpha). h(\beta). h(\gamma)$ は $\alpha^3 \in \mathbb{R}^3$ を fixed point にもつ。Fried. Goldman. Hirsch の定理より.

$h(\beta). h(\gamma)$ は unipotent で. $[\beta, \gamma] \neq 1$ であるから. Step 2 より. $\alpha^3 \in \{(x, y, z) ; x^2+y^2-z^2=0\}$ であり. 再び Step 2 により. $h(\alpha)$ は unipotent である。しかるに $h(\alpha)^3 = h(\alpha^3) = 1$ であるから $h(\alpha) = 1$ となり $\alpha \in \mathbb{R}^3$ である。従って. $\alpha \in Z(N)$ となるが, これは $[\alpha, \beta] \neq 1$ $[\alpha, \gamma] \neq 1$ に矛盾する。

以上で Step 3 が示せ. 3.1. が証明された。

最後に，3次元の場合のJ. Milnorの向に対する肯定的解決が，Fried, Goldmanらによっても独立に解かれていることを，指摘しておきたい。

References.

[1] Evans, B, Moser, L., Solvable fundamental groups of compact 3 manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. (1972), 189-210.

[2] Fried, D., Goldman, W., Hirsch, M. Affine manifolds with nilpotent holonomy, Comm. Math. Helv. 56 (1981), 487-523.

[3] Fried, D. Goldman, W., Three dimensional affine crystallographic groups

[4] Milnor, J., On fundamental groups of complete affinely flat manifolds, Adv. in Math 25 (1977), 178-187

[5] Raghunathan, M.S. Discrete subgroups of Lie groups, Ergebnisse der Mathematik Band 68, Springer-Verlag (1972)